# 944. 非可換群，群指標，双對定理ニ就テ

東大代數談話會

可換群トソノ character 群トノ間ノ duality（特ニ部分群ノ間ノ關係）ハ良ク知ラレテヰル通リデアルが，非可換群ノ場合ニハ，character ノ代リニ表現ノ集リヲ考ヘルコトニヨッテ，淡中氏ニヨッテ双對關係が得ラレタ。此処デハ Frobenius ノ立場ニ戻ッテ，groupring ノ center ト character ノ作ル algebra トノ間ノ關係ヲ，$\mathfrak{L}$-algebra（§1 參照）トソノ conjugate $\mathfrak{L}$-algebra トノ間ノ duality トシテ調ベテ，character ニヨッテ群ノ構造が何処マデ判ルカトイフコトヲ考ヘテ見タイト思ヒマス。先ヅ有限群ノ場合ニ G. Hoheisel, Über Charaktere, Monatsh. f. M. u. P., Bd. 48 (1939) ノ方法ヲ用ヒテ考ヘ（§1, §2），次ニ bicompact group ノ場合ニ一部ノ結果ヲ延長シヨウト思ヒマス（§3）。

## §1

定義「複素數体 $\Omega$ ヲ基礎体トシ，$x_1, \cdots\cdots, x_n$ ヲ base トスル algebra $\mathfrak{a} = x_1\Omega + \cdots\cdots + x_n\Omega$ が次ノ條件ヲ満足スルトキニ $\mathfrak{L}$-algebra ト呼ブコトニスル。

(1) $\mathfrak{a}$ ハ commutative デアル。

即チ $x_\alpha x_\beta = \sum_\gamma c_{\alpha\beta}^\gamma x_\gamma$ トスレバ，$c_{\alpha\beta}^\gamma = c_{\beta\alpha}^\gamma$.

(2) Unit element $e = x_1$ ヲ持ツ。即チ $c^{\gamma}_{1\alpha} = \delta^{\gamma}_{\alpha}$

($\delta^{\gamma}_{\alpha}$ ハ Kronecker ノ $\delta$)

(3) $c^{\gamma}_{\alpha\beta}$ ハスベテ real デアル。

(4) $(x_1 \cdots\cdots x_\alpha \cdots\cdots x_n)$ ノ一ツノ並ビカヘ $(x_{1'}, \cdots\cdots x_{\alpha'}, \cdots\cdots x_{n'})$ ガ次ノ (イ) (ロ) ヲ満足スル。

(イ) $(\alpha')' = \alpha$

(ロ) $c^{\gamma}_{\alpha\beta} = c^{\gamma'}_{\alpha'\beta'}$，即チ $u = \sum_{\alpha} u_\alpha x_\alpha \leftrightarrow u' = \sum_{\alpha} u_\alpha x_{\alpha'}$ ハ $\mathfrak{O}$ ノ ring automorphism ヲ與ヘル。

(5) $c^{1}_{\alpha\beta} = \delta^{\beta'}_{\alpha} h_\alpha$，$h_\alpha > 0$

(6) $x_\alpha \longrightarrow h_\alpha$ ハ $\mathfrak{O}$ ノ一ツノ表現ヲ與ヘル。

即チ $h_\alpha h_\beta = \sum_{\gamma} c^{\gamma}_{\alpha\beta} h_\gamma$』

直チニワカルコトハ

(7) $1' = 1$

(8) $h_1 = 1$, $h_\alpha = h_{\alpha'}$

(9) $c^{\gamma'}_{\alpha\beta} h_\gamma = c^{\alpha'}_{\beta\gamma} h_\alpha$.

((9) ハ $c^{\gamma}_{\alpha\beta}$ ノ間ノ関係 $\sum_{\lambda} c^{\lambda}_{\alpha\beta} c^{\delta}_{\lambda\gamma} = \sum_{\lambda} c^{\delta}_{\alpha\lambda} c^{\lambda}_{\beta\gamma}$ デ $\delta = 1$ トシテ (5) ヲ用ヒレバヨイ。)

一番大切ナ $\mathfrak{L}$-algebra ノ例ハ，有限群 $\mathfrak{g}$ カラ作ッタ group ring of $\mathfrak{g}$ ノ center $\mathfrak{O}_{\mathfrak{g}}$ デアル。$\mathfrak{g} \ni a_\alpha$ カラ，ソノスベテノ conjugate elements ノ和 $x_\alpha = a_\alpha + x_2 a_\alpha x_2^{-1} + \cdots\cdots + x_\gamma a_\alpha x_\gamma^{-1}$ ヲ作レバ，$x_1, \cdots$

$\cdots\cdots, x_n$ ハ $\mathfrak{O}_g$ ノ base デアル。之レガ $\mathfrak{L}$-algebra デアルコトハ，$x_1=e$，$n$ ハ conj. class ノ数，$h_\alpha$ ハ $a_\alpha$ ノ属スル conj. class ノ元ノ数，$x_{\alpha'}=a_\alpha^{-1}+x_2a_\alpha^{-1}x_2^{-1}+\cdots\cdots+x_ra_\alpha^{-1}x_r^{-1}$．(6) ハ $\mathfrak{O}_g$ ノ principal rep. ニ對應スルトイフコトヨリ分ル。今一ツノ例ハ次ニ示スヤウニ $\mathfrak{O}_g$ ノ character ノ作ル algebra デアル。

定理1.「Rang $n$ ノ $\mathfrak{L}$-algebra $\mathfrak{O}$ ノ linear operator 全体ハ適當ニ算法ト，base ヲ與ヘルコトニヨリ，又一ツノ Rang $n$ ノ $\mathfrak{L}$-algebra $\overline{\mathfrak{O}}$ ヲ作ル。$\overline{\mathfrak{O}}$ ヲ $\mathfrak{O}$ ノ conjugate algebra ト呼ブ。」

(證) 先ヅ $\mathfrak{O}$ = Radikal ノ無イコト，即チ $n$ 箇ノ一次独立ナ一次ノ表現，$\varphi^{(k)}=(x_1^{(k)},\cdots\cdots,x_n^{(k)})$ ノ存在スルコトヲ證明スル。$u=\sum_\alpha u_\alpha x_\alpha\to D(u)=(d_\alpha^\gamma(u))$，$d_\alpha^\gamma(u)=\sum_\beta u_\beta c_{\alpha\beta}^\gamma$ ハ $\mathfrak{O}$ ノ faithful regular rep. デアル。

$$K=\begin{pmatrix}\sqrt{h_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{h_n}\end{pmatrix}\text{ ニヨッテ}$$

$$D_1(u)=K^{-1}D(u)K=\left(d_\alpha^\gamma(u)\sqrt{\frac{h_\gamma}{h_\alpha}}\right)\text{ ヲ作レ}$$

バ，(9) ヨリ

(10) $\quad D_1(u')=D_1(u)'$

トナル。$D_1(u)$ ハ $\mathfrak{O}$ ノ表現デアルカラ，$D_1(u)D_1(v)=D_1(v)D_1(u)$，故ニ $\{D_1(u)\}$ ハ互ニ commutative ナ normal matrix ノ集リデアルカラ，一ツノ unitary matrix $U$ デ同時ニ diagonal form ニ導スコトガ出来ル。

$$(KU)^{-1}D(u)(KU)=U^{-1}D_1(u)U=\begin{pmatrix}\lambda^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda^{(n)}\end{pmatrix}.$$

コヽニ $\lambda^{(k)}(u)=\sum_{\beta}u_\beta x_\beta^{(k)}$ ナル $u_\beta$ ニツイテノ一次式トナリ，$\mathfrak{x}^{(k)}=(x_1^{(k)},\cdots\cdots,x_n^{(k)})$ ハ $D(u)$ ガ faithful ナル故，一 $n$ 箇ノ一次独立ナ表現ヲ與ヘル。特ニ $u_\beta$ ヲ変数ト見レバ，$u'=\overline{u^{-1}}$ カラ $U^{-1}D_1(u')U=\begin{pmatrix}\overline{\lambda^{(1)}} & \cdots\cdots & \overline{\lambda^{(n)}}\end{pmatrix}$，即 $\lambda^{(k)}(u')=\overline{\lambda^{(k)}(u)}$ トナル．即

(11) $\quad x_{\beta'}^{(k)}=\overline{x_\beta^{(k)}} \qquad (k=1,\cdots\cdots,n)$

特ニ $x_1$ ハ $\mathfrak{A}$ ノ unit element デアルカラ

(12) $\quad x_1^{(k)}=1$

又 $\mathfrak{x}^{(1)},\cdots\cdots,\mathfrak{x}^{(n)}$ ハ $\mathfrak{A}$ ノ一次表現ヲ盡シテ居ルカラ，$\overline{\mathfrak{x}^{(k)}}$ ナル表現ヲ考ヘレバ

$(1,\cdots\cdots,n)$ ノ一ツノ並ビカヘ $(1',\cdots\cdots,n')$ ガアッテ $((k')'=k)$

(13) $\quad \overline{x_\beta^{(k)}}=x_\beta^{(k')} \qquad (\beta=1,\cdots\cdots,n)$

特ニ (6) ノ假定ニ從ッテ

(14) $\quad \mathfrak{x}^{(1)}=(h_1,\cdots\cdots,h_n)$

ト置ク。$(1'=1)$

又 $f_k=\sum_\alpha h_\alpha\cdot\left(\sum_\rho |x_\rho^{(k)}|^2\cdot h_\rho^{-1}\right)^{-1}>0$ $(k=1,\cdots$

$\cdots\cdots,n)$ ト置ケバ

$$(15)\quad \sum_{k=1}^{n} f_k x_\alpha^{(k)}=\begin{cases}\sum_\beta h_\beta & (\alpha=1)\\ 0 & (\alpha\neq 1)\end{cases}$$

ヲ計算ニテ証明出来ル。（Hoheisel, p. 455）．特ニ $k=1$

ナラバ $x_\rho^{(k)}=h_\rho$ カラ

$$(16)\quad f_1=1 \quad 及ビ \quad f_k=f_{k'}$$

トナル。（15）式ヨリ

$$(17)\quad \sum_k f_k x_\alpha^{(k)}\overline{x_\beta^{(k)}}=\sum_\gamma c_{\alpha\beta}^\gamma\cdot\sum_k f_k x_\gamma^{(k)}$$

$$=\delta_\alpha^\beta\cdot h_\alpha\cdot\sum_\beta h_\beta$$

トナル。コヽデ $\alpha=\beta=1$ トオケバ（12）カラ

$$(18)\quad \sum_{k=1}^{n} f_k=\sum_{\alpha=1}^{n} h_\alpha=g$$

ト置ク。

サテ $\mathfrak{O}=\mathfrak{O}_{\mathfrak{G}}$ ノ場合ニハ $\mathfrak{G}$ ノ $n$ 箇ノ既約表現 $D^{(1)},\cdots$

$\cdots,D^{(n)}$（次表ヲ $n_k$ トスル）ヲ考ヘレバ

$$D_\alpha^{(k)}=D^{(k)}(a_\alpha)+D^{(k)}(x_2a_\alpha x_2^{-1})+\cdots+D^{(k)}(x_\gamma a_\alpha x_\gamma^{-1})$$

$$=\begin{pmatrix}x_\alpha^{(k)} & & \\ & \ddots & \\ & & x_\alpha^{(k)}\end{pmatrix}$$

ト置イタコトニナル。character ハ

$$\chi(a_\alpha)=\frac{1}{h_\alpha}\cdot S_p(D_\alpha^{(k)})=\frac{n_k}{h_\alpha}x_\alpha^{(k)}$$

デアル。

(15)デ定メタ $f_k$ ガ $f_k=n_k^2$ ヲ満足スルコトハ，(15)式ガ丁度 $\mathfrak{O}$ ノ regular rep. ノ Spur ニナッテ居ルトイフコトカラ分ル。

サテ今ノ場合ニモ

$$(19)\quad \chi_\alpha^{(k)}=\frac{\sqrt{f_k}}{h_\alpha}x_\alpha^{(k)}$$

トオケバ，(17) ヨリ

$$(\mathrm{I})\quad \sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{h_\alpha}{g}}\chi_\alpha^{(k)}\cdot\sqrt{\frac{h_\beta}{g}}\chi_{\beta'}^{(k)}=\delta_\alpha^\beta$$

故ニ $x_{\beta'}^{(k)}=\overline{x_\beta^{(k)}}$ カラ $\left(\sqrt{\frac{h_\alpha}{g}}\chi_\alpha^{(k)}\right)$ ガ unitary matrix トナリ

$$(\mathrm{II})\quad \frac{1}{g}\sum_{\alpha=1}^{n}h_\alpha\chi_\alpha^{(k)}\chi_\alpha^{(l')}=\delta_k^l$$

又 $\{x_\alpha^{(k)}\}$ ガ $\mathfrak{O}$ ノ表現デアルトイフコトカラ

$$(\mathrm{III})\quad h_\alpha h_\beta\chi_\alpha^{(k)}\chi_\beta^{(k)}=\sqrt{f_k}\sum_{\gamma=1}^{n}c_{\alpha\beta}^{\gamma}h_\gamma\chi_\gamma^{(k)}$$

(II) ノ直交性カラ

$$(\mathrm{IV})\quad \chi_\alpha^{(k)}\chi_\alpha^{(l)}=\sum_{m=1}^{n}g_{kl}^{m}\chi_\alpha^{(m)}$$

コヽニ

$$(20)\quad g_{kl}^{m}=\frac{1}{g}\sum_{\alpha=1}^{n} h_\alpha \chi_\alpha^{(k)} \chi_\alpha^{(l)} \chi_\alpha^{(m')}$$

トシテ定メラレル。以上カラ定理ノ證明ヲ與ヘルタメニ先ヅ $\mathfrak{A}$ ノ base ヲカヘテ

$$(21)\quad y_\alpha=\frac{1}{h_\alpha} x_\alpha \qquad (\alpha=1,\cdots\cdots,n)$$

ヲ取ル。ソノ $n$ 箇ノ一次獨立ナ表現 $y_\alpha^{(k)}=\frac{1}{h_\alpha} x_\alpha^{(k)}$ ($k=1,\cdots\cdots,n$) ノ積ヲ各 base ニ對シテ取ル値ノ積デ定義スレバ, $\chi_\alpha^{(k)}=\sqrt{f_k}\, y_\alpha^{(k)}$ カラ

$$y_\alpha^{(k)} y_\alpha^{(l)}=\sum_{m=1}^{n}\sqrt{\frac{f_m}{f_k f_l}}\, g_{kl}^{m}\, y_\alpha^{(m)}$$

トナル。斯ク得ラレタ commutative algebra ガ, base ヲ入レカヘテ

$$(22)\quad z_\alpha^{(k)}=f_k y_\alpha^{(k)}=\sqrt{f_k}\,\chi_\alpha=\frac{f_k}{h_\alpha} x_\alpha^{(k)}$$

トオケバ

$$(23)\quad z_\alpha^{(k)} z_\alpha^{(l)}=\sum_{m=1}^{n} d_{kl}^{m} z_\alpha^{(m)},\quad d_{kl}^{m}=\sqrt{\frac{f_k f_l}{f_m}}\, g_{kl}^{m}$$

トナル。$\overline{\mathfrak{A}}=z^{(1)}\Omega+\cdots\cdots+z^{(n)}\Omega$ ガ $\mathfrak{L}$-algebra ナルコトハ (1)—(6) ヲ順次ニ驗セバヨイ。

(2) ハ (14), (16) ヨリ。

(3) ハ $\overline{g_{kl}^{m}}=\frac{1}{g}\sum_{\alpha} h_\alpha \chi_{\alpha'}^{(k)} \chi_{\alpha'}^{(l)} \chi_{\alpha'}^{(m')}=g_{kl}^{m}$ ヨリ。

(4) ハ (13) ヨリ

$$(5)\text{ ハ }\quad d'_{kl} = \frac{\sqrt{f_k f_l}}{g}\sum_{\alpha} h_\alpha \chi_\alpha^{(k)} \chi_\alpha^{(l)} = \sqrt{f_k f_l}\,\delta_k^{l'} = f_k\cdot\delta_k^{l'}$$

((III) ト (16) カラ)。

(6) ハ (IV) ヨリ。

定理2「$\mathfrak{L}$-algebra $\mathfrak{A} = x_1\Omega + \cdots\cdots + x_n\Omega$ ノ conjugate $\mathfrak{L}$-algebra $\bar{\mathfrak{A}} = z^{(1)}\Omega + \cdots\cdots + z^{(n)}\Omega$ カラ再ビ conjugate $\mathfrak{L}$-algebra $\bar{\bar{\mathfrak{A}}}$ ヲ作レバ，base マデ考ヘニ入レテ $\bar{\bar{\mathfrak{A}}} = \mathfrak{A}$ トナル。」

(證) $d'_{kl'} = f_k$ デアッタカラ，$\mathfrak{A}$ ノ $h_\alpha$ ニ對スルモノハ，$\bar{\mathfrak{A}}$ デハ $f_k$ デアル。($\sum_\alpha h_\alpha = \sum_k f_k$)。$\bar{\mathfrak{A}}$ ノ $n$ 箇ノ表現ハ $z^{(k)} \to \sqrt{f_k}\,\chi_\alpha^{(k)}$ $(\alpha = 1, \cdots\cdots, n)$ デ，之レカラ (15) ニ相當スル式ヲ解ケバ，((II) デ $l=1$ トスレバ $\sum_\alpha h_\alpha \sqrt{f_k}\,\chi_\alpha^{(k)} = \delta_k^{1}\cdot g$ トナルカラ) (15) ノ $f_k$ ニ當ルモノハ $h_\alpha$ トナル。

$\bar{\bar{\mathfrak{A}}}$ ノ base ハ從ッテ (22) ニ對應シテ

$$\frac{h_\alpha}{f_k}\cdot\sqrt{f_k}\,\chi_\alpha^{(k)} = \frac{h_\alpha}{\sqrt{f_k}}\chi_\alpha^{(k)} \quad (\alpha = 1, \cdots\cdots, n)$$

デアル。(III) 式カラ

$$\frac{h_\alpha}{\sqrt{f_k}}\chi_\alpha^{(k)}\cdot\frac{h_\beta}{\sqrt{f_k}}\chi_\beta^{(k)} = \sum_\gamma c_{\alpha\beta}^{\gamma}\frac{h_\gamma}{\sqrt{f_k}}\chi_\gamma^{(k)}$$

デアルカラ，$\bar{\bar{\mathfrak{A}}}$ ノ base ノ主ドル、(1) ニ於ケル係數ハ再ビ $c_{\alpha\beta}^{\gamma}$ トナッタ，故ニ

$$x_\alpha \longrightarrow \frac{h_\alpha}{\sqrt{f_k}} \chi_\alpha^{(k)}$$ ハ $\mathfrak{A}$ ト $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}$ トノ間ノ isomorphic relation ヲ與ヘル。q.e.d.

以上ニヨッテ $\mathfrak{G}$ ノ character ヲ決定スルニハ $\mathfrak{G}_\Omega$ ノ center $\mathfrak{A}_\mathfrak{g}$ サヘ與ヘラレヽバ十分デアリ，逆ニ $\mathfrak{G}$ ノ character カラ $\mathfrak{A}_\mathfrak{g}$ ノ構造ガ決定サレル。

## § 2

可換群トソノ character group トノ部分群ノ間ノ關係ヲ，$\mathfrak{L}$-algebra $\mathfrak{A}$ トソノ conjugate $\overline{\mathfrak{A}}$ トノ間デ考ヘル。

定義「$\mathfrak{L}$-algebra $\mathfrak{A} = x_1\Omega + \cdots\cdots + x_n\Omega$ ノ characteristic subalgebra (C-subalg.) $\mathfrak{M}$ トハ

(24) $\mathfrak{M} = x_{\alpha_1}\Omega + \cdots\cdots + x_{\alpha_m}\Omega \quad (x_{\alpha_1} = x_1)$

ナル形ノ $\mathfrak{A}$ ノ一ツノ $\mathfrak{L}$-subalgebra ヲイフ。即チ unit ヲ含ム $\mathfrak{A}$ ノ submodul デ

(25) $\mathfrak{M} \ni u \longrightarrow \mathfrak{M} \ni u'$

(26) $\mathfrak{M} \ni x_{\alpha_i}, x_{\alpha_j}, \; x_{\alpha_i} x_{\alpha_j}$

$$= \sum_k c_{\alpha_i\alpha_j}^k x_k, \; c_{\alpha_i\alpha_j}^k \neq 0 \text{ ナラ } \mathfrak{M} \ni x_k \text{」}$$

$\mathfrak{A}$ ガ $\mathfrak{G}_\Omega$ ノ center ノ場合ニハ丁度アル $\mathfrak{G}$ ノ normalteiler $\mathfrak{N}$ ニ含マレテヰル conj. class ニ對應スル base デ張ラレル subalg. デアリ，$\mathfrak{A}$ ガ $\mathfrak{G}$ ノ character alg. ノトキハ van Kampen ニヨッテ

定義サレタ表現(又ハ character ノ)ノ module ト丁度對應スル。

定理 3. 『$\mathfrak{L}$-alg. $\mathfrak{O}$ ト其ノ C-subalg. $\mathfrak{M}$ トガ與ヘラレルトキニ，$\mathfrak{O}$ ノ conjugate $\mathfrak{L}$-alg. $\overline{\mathfrak{O}} = \xi^{(1)}\Omega + \cdots\cdots + \xi^{(n)}\Omega$ 中

$$(27) \quad \xi^{(k)}_{\alpha_i} = \frac{f_k}{h_{\alpha_i}} \quad (i = 1, \cdots\cdots, m)$$

ヲ滿足スル $\xi^{(k)}$ ノ全体ヲ(番号ヲツケカヘテ) $\xi^{(1)}, \cdots\cdots, \xi^{(r)}$ トスレバ

$$(28) \quad \mathfrak{M}^{0} = \xi^{(1)}\Omega + \cdots\cdots + \xi^{(r)}\Omega$$

ハ $\overline{\mathfrak{O}}$ ノ C-subalg. ヲ作ル。逆ニ $\mathfrak{M}^{0}$ カラ $\mathfrak{O}$ ノ C-subalg. $\mathfrak{M}^{00}$ ヲ今ノ關係デ定メレバ，再ビ $\mathfrak{M}$ ヲ得ル。即.

$$(29) \quad \xi^{(k)}_{\alpha_i} = \frac{f_k}{h_{\alpha_i}} \quad (k = 1, \cdots\cdots, r)$$

ヲ滿足スルノハ $\alpha_1, \cdots\cdots \alpha_m$ ニ限ル。コノ對應デ，$\mathfrak{O}$ ト $\overline{\mathfrak{O}}$ ノ C-subalg. ハ一對一ニ對應スル。但シ $\mathfrak{O}, \overline{\mathfrak{O}}$ ニ於テ，ソノ (1)，(23) 式ノ $c^{\gamma}_{\alpha\beta}$，$d^{m}_{kl}$ ハスベテ正ナルモノト假定スル。』

(証) $\mathfrak{M}$ ノ conj. $\mathfrak{L}$-alg. ヲ $\overline{\mathfrak{M}}$ トスル。$\mathfrak{M}$ ノ表現ヲ $y^{(j)}_{\alpha_i}$ $(i, j = 1, \cdots\cdots, m)$，$y^{(j)}_{\alpha_i}$ ニ對スル (15) ノ解ヲ $f^{0}_{j}$，$v^{(j)} = f^{0}_{j}\, y^{(j)}$ トスレバ，$\overline{\mathfrak{M}} = v^{(1)}\Omega + \cdots\cdots + v^{(m)}\Omega$.

$$(30) \quad v^{(i)}v^{(j)} = \sum_{k=1}^{m} \overline{d}^{\,k}_{ij}\, v_k$$

トスル。$\mathfrak{A}$ ノ表現 $x_\alpha^{(k)}$ $(k=1,\cdots\cdots,n)$ ヲ $\mathfrak{M}$ ノ表現トミテ，互ニ相等シイモノノ組ニ分ケル。ソレヲ

$$\left\{x_\alpha^{(k_1^1)},\cdots\cdots, x_\alpha^{(k_{r_1}^1)}\right\}\left\{x_\alpha^{(k_1^2)},\cdots\cdots, x_\alpha^{(k_{r_2}^2)}\right\}\cdots\cdots,$$

$$\left\{x_\alpha^{(k_1^t)}\cdots\cdots x_\alpha^{(k_{r_t}^t)}\right\}$$ トスル。

（コヽニ $k_\mu^l=\mu$ トス）即チ $x_{\alpha_i}^{(k_\mu^l)}=y_{\alpha_i}^{(j_l)}$ $(i=1,\cdots\cdots,m)$ ナル $j_l$ ガ定マルワケデアルガ，スベテノ $y_\alpha^{(j)}$ $(j=1,\cdots\cdots,m)$ ガカクシテ得ラレルコトハ次ノ如クニ分ル。

$y_{\alpha_i}^{(j)}$ ハ linear operator トシテ $\mathfrak{A}$ 全体ニ拡張スレバ，$x^{(1)},\cdots\cdots,x^{(n)}$ ノ linear combination トシテアラハサレル。故ニ $\alpha_i$ ナル所ダケヲ考ヘレバ，

$y_{\alpha_i}^{(j)}=\sum_{l=1}^{t} c_l\, y_{\alpha_i}^{(j_l)}$ トナル，$y_{\alpha_i}^{(j)}$ $(j=1,\cdots\cdots,m)$ ハ勿論 $\mathfrak{M}$ 上デ一次独立ナル故アル $l$ ガ $y^{(j)}=y^{(j_l)}$ トナル。即 $t=m$ トナリ，番号ヲ適当ニカヘテ

$$(31)\quad x_{\alpha_i}^{(k_\mu^l)}=y_{\alpha_i}^{(l)}\quad (i,l=1,\cdots\cdots,m;\ \mu=1,\cdots\cdots,r_l)$$

トスル。コノ時

$$(32)\quad z_{\alpha_i}^{(k_\mu^l)}=\frac{f_{k_\mu^l}}{h_{\alpha_i}}\,x_{\alpha_i}^{(k_\mu^l)}=\frac{f_{k_\mu^l}}{f_l^0}\,\frac{f_l^0}{h_{\alpha_i}}\,y_{\alpha_i}^{(l)}$$

$$= \frac{f_{k^l_\mu}}{f^0_k} v^{(l)}_{\alpha_i} \quad (l=1, \cdots\cdots, m).$$

サア $\mathfrak{M}^0$ ガ又 $\overline{\mathfrak{O}}$ ノ C-subalg. ヲ作ルコトヲ証明シヨウ。
今

$$z^{(i)}_\alpha z^{(j)}_\alpha = \sum_k d^k_{ij} z^{(k)}_\alpha , \quad i, j \leqq r$$

トスレバ, $\alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_m$ デ考ヘレバ (32) ヨリ

$$f_i f_j v^{(1)}_{\alpha_i} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{f^0_k} \left( \sum_\mu d^{k^l_\mu}_{ij} f_{k^l_\mu} \right) v^{(l)}_{\alpha_i} ,$$

デ, $d^k_{ij} \geqq 0$ デアルカラ, $d^{k^l_\mu}_{ij} = 0$ , $l > 1$ デナケレバナラナイ。即チ $\mathfrak{M}^0$ ハ C-subalg. トナル。

次ニ

(33) $$Z^{(l)}_0 = \sum_{\mu=1}^{r_l} z^{(k^l_\mu)} \quad (l=1, \cdots\cdots, m)$$

トオイテ

(34) $$z^{(k^l_\mu)}_\alpha Z^{(1)}_{0\alpha} = \frac{f_{k^l_\mu}}{f^0_l} Z^{(l)}_{0\alpha}$$

ヲ証明スル。先ヅ $z^{(k^l_\mu)} Z^{(1)}_0 = \sum_s l_s z^{(s)}$ トオクノ両辺ニ $\overline{z^{(k^i_\nu)}}$ ヲカケレバ

(35) $$l_{k^i_\nu} \cdot f_{k^i_\nu} z^{(1)} + \sum_{s \neq 1} e'_s z^{(s)} = \overline{z^{(k^i_\nu)}} z^{(k^l_\mu)} Z^{(1)}_0$$

此処デ

(36) $$z^{(k^l_\mu)}_\alpha \overline{z^{(k^i_\nu)}_\alpha} = \sum_s b_s z^{(s)}_\alpha$$ トオケバ

(35) ノ右辺中 $\mathfrak{Z}^{(1)}$ ノ係數ハ

$$(37)\quad \sum_{\lambda=1}^{r} b_{k'_\lambda} f_{k'_\lambda}$$

デアル。一方 (36) デ $\alpha_i$ ($i=1, \cdots\cdots, m$) デハ

$$\frac{f_{k^l_\mu} f_{k^i_\nu}}{f^0_l f^0_i} v^{(l)}_{\alpha_i} \overline{v^{(i)}_{\alpha_i}} = \sum_{s=1}^{m} \left( \sum_{\lambda=1}^{r_s} b_{k^s_\lambda} \frac{f_{k^s_\lambda}}{f^0_s} \right) v^{(s)}_{\alpha_i}$$

トナルカラ (30) ト比ベテ

$$(38)\quad \overline{d^s_{l i'}} = \frac{f^0_l f^0_i}{f^0_s} \frac{1}{f_{k^l_\mu} f_{k^i_\nu}} \left( \sum_{\lambda=1}^{r_s} b_{k^s_\lambda} f_{k^s_\lambda} \right)$$

故ニ (35), (37) カラ

$$(39)\quad e_{k^i_\nu} f_{k^i_\nu} = \frac{f_{k^l_\mu} f_{k^i_\nu}}{f^0_l f^0_i} \cdot \overline{d'_{l i'}}$$

トナル。故ニ

$$(40)\quad \begin{cases} e_{k^i_\nu} = 0, & i \neq l, \\ e_k e_\mu = \dfrac{f_{k^l_\mu}}{f^{02}_l} \overline{d'_{l l'}} = \dfrac{f_{k^l_\mu}}{f^0_l} & \text{即チ(34)トナル} \end{cases}$$

(34) 式ハ $Z^{(1)}_0$, 即チ $\mathfrak{Z}^{(1)}, \cdots\cdots, \mathfrak{Z}^{(n)}$ サヘキマレバ, $Z^{(2)}_0, \cdots\cdots, Z^{(m)}_0$ ハ定マルコトヲ示ス。今 $\mathfrak{M}^{00} \neq \mathfrak{M}$ トスレバ, $\mathfrak{M}^{00} \supset \mathfrak{M}$ ハ明カデアルカラ, $\mathfrak{M}^{00}$, conj. $\mathfrak{L}$-alg. ノ rang ハ $m$ ヨリ大デナケレバナラヌ。$(\mathfrak{M}^{00})^0 = \mathfrak{M}^0$ カラ $\overline{\mathfrak{M}^{00}}$ ノ rang ハ $Z^{(1)}_0$ 丈デキマルノデアルカラ矛盾トナル。即チ $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^{00}$, q.e.d.

次ニ Faktoralgebra $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ ヲ $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ト analogous ニ定義スル。先ヅ

(41) $$Z^{(l)}=\frac{1}{f_m}Z_0^{(l)} \quad (l=1,\cdots\cdots,m)$$

コヽニ $f_m=\sum_{\mu=1}^{r} f_{k'_\mu}$ トオク。(34) デ $\alpha=1$ トオケバ

(42) $$\sum_{\lambda=1}^{r_e} f_{k^l_\lambda}=f_e^0\cdot f_m$$

トナル。故ニ (34) ヲ $\mu=1,\cdots\cdots,r_e$ ニツイテ加ヘレバ

(43) $$Z_\alpha^{(l)}Z_\alpha^{(1)}=Z_\alpha^{(l)}$$

トナル。全ク同様ニ

(44) $$Z^{(i)}Z^{(j)}=\sum_{k=1}^{m}\bar{\alpha}_{ij}^{k}Z^{(k)}$$

定義『 $\mathfrak{L}$-alg. $\mathfrak{A}\pm x_1\Omega+\cdots\cdots+x_n\Omega$ トソノ C-subalg. $\mathfrak{M}=x_1\Omega+\cdots\cdots+x_r\Omega$ トガアルトキ Factor-$\mathfrak{L}$-algebra $\mathfrak{A}/\mathfrak{M}$ ヲ次ノ如リ定義スル。

$$X_0^{(1)}=x_1+\cdots\cdots+x_r$$

トスレバ，$x_1,\cdots\cdots,x_n$ ハ $m$ 組 $\left\{x_{k'_1},\cdots\cdots,x_{k'_r}\right\}$

$$(x_{k'_\mu}=x_\mu\cdot\ \mu=1,\cdots\cdots,r)$$

$\left\{x_{k^2_1}\cdots\cdots x_{k^2_{r_2}}\right\}\cdots\cdots\left\{x_{k^m_1}\cdots\cdots x_{k^m_{r_m}}\right\}$

$(r_1+\cdots\cdots+r_m=n)$ ニ分ケラレテ

$$X_0^{(l)}=x_{k^l_1}+\cdots\cdots+x_{k^l_{r_e}}$$

トオケバ，組分ケハ $X_0^{(1)}$ カラ

$$x_{h_\mu^l} X_0^{(1)} = c_\mu^l \cdot X_0^{(l)}$$

ニヨツテ確定サレル。其ノ時

$$X^{(l)} = \frac{1}{f_m} X_0^{(l)}, \quad f_m = \sum_{h=1}^{r} f_h$$

トオケバ，$X^{(1)}, \cdots\cdots, X^{(m)}$ ハ又一ツノ $\mathfrak{L}$-alg. ノ base ヲ作リ，コノ $X^{(1)}, \cdots\cdots, X^{(m)}$ ヲ base トスル $\mathfrak{L}$-alg. ヲ $\mathfrak{A}/\mathfrak{M}$ ト定メル。』

(44) デ得タノハ $\mathfrak{M}$ ガ $\mathfrak{M}^0$ トシテ得ラレタ場合デアルガ，$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^{00} = (\mathfrak{M}^0)^0$ デアルカラ，一般ニ (44) ハ成立スル。コレヲ用ヒレバ (44) ト (30) ヲ比ベテ

定理4.『$\mathfrak{L}$-alg. $\mathfrak{A}$ トソノ conj. $\mathfrak{L}$-alg. $\overline{\mathfrak{A}}$ ニテ $c_{\alpha\beta}^{\gamma}$, $d_{hl}^{m}$ ガスベテ $\geqq 0$ ナル時ニ，$\mathfrak{A}$ ノ C-subalg $\mathfrak{M}$ カラ定理3デ $\mathfrak{M}^0 \subset \overline{\mathfrak{A}}$ ナル C-alg. ヲ対応サセレバ，

$$\overline{\mathfrak{M}} \cong \overline{\mathfrak{A}}/\mathfrak{M}^0, \quad \overline{\mathfrak{M}^0} \cong \mathfrak{A}/\mathfrak{M}$$

ガ成立スル。但シ $\overline{\mathfrak{M}}$，$\overline{\mathfrak{M}_0}$ ハ夫々 conjugate $\mathfrak{L}$-alg. ヲ示ス。』

$\mathfrak{A}$ ガ $\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}}$ ノ center ノ場合 $\mathfrak{M}$ ガ Normalteiler $\mathfrak{N}$ カラ定メラレルトキ $\overline{\mathfrak{M}^0} \cong \mathfrak{A}/\mathfrak{M}$ ハ $(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})$ ノ character alg. ガ $\overline{\mathfrak{A}}$ ノ subalg. トシテ得ラレタノデアリ，$\overline{\mathfrak{M}} \cong \overline{\mathfrak{A}}/\mathfrak{M}^0$ ハ $\mathfrak{N}$ ノ character alg. (但シ $\mathfrak{G}$ ニ関シテ conj. character ヲマトメテ考ヘタモノ) ガ $\mathfrak{G}$ ノ character alg. カラ Factoralgebra

トシテ得ラレルコトヲ示シテキル。直接ニ証明スルニハ induced character ヲ考ヘレバヨイ。

## § 3

$\mathfrak{G}$ が bicompact group ノ場合ニハ、有限群ノ時ノ様ニ直接ニ証明スルコトハムツカシイ。

以下 Pontrjagin, topological groups ヲ用ヒル。

$\mathfrak{G}$ ヲ $x$ カラ $axa^{-1}$ $(a \in \mathfrak{G})$ トシテ得ラレル全体 $\bar{x}$ ハ $\mathfrak{G}$ ノ中デ closed デアルカラ, $\bar{x}$ ヲ一点ニ identify シテ "Zerlegungsraum" $\overline{\mathfrak{G}}$ ヲ作ル。$\mathfrak{G}$ ノ上ノ invariant continuous function $f(x)$ $(f(x) = f(axa^{-1}))$ ノ全体ト, $\overline{\mathfrak{G}}$ ノ上ノ continuous function ノ全体 $R_{\overline{\mathfrak{G}}}$ ハ一致スル.

$R_{\overline{\mathfrak{G}}}$ ハ次ノ如ク normed ring (但シ 1 ハ含マナイが) ヲ作ル。

$$f(\bar{x}) \longleftrightarrow f(x) = f(axa^{-1}) \text{ on } \mathfrak{G}$$

トスルトキ, 積ヲ

$$f * g(\bar{x}) = f * g(x)$$

$$= \int_{\mathfrak{G}} f_1(xy^{-1}) g(y)\, dy = \int_{\mathfrak{G}} g(xy^{-1}) f(y)\, dy$$

デ定メ

$$\|f\| = \underset{\bar{x} \in \overline{\mathfrak{G}}}{\mathrm{Max}} |f(\bar{x})|$$

トオク。$\mathfrak{R}_{\mathfrak{g}}$ ノ complete ナルコト，$\|f*g\| \leqq \|f\|\cdot\|g\|$ ハ明カデアル。

定理5『$\mathfrak{g}$ ノ character $\chi(x)$ ト $\mathfrak{R}_{\mathfrak{g}}$ ノ maximal ideal M トハ1對1ニ對應スル。即チ maximal ideal M ガアルト mod. M デ定メル multiplicative functional ヲ F トスレバ

$$
(45)\quad \begin{cases} F(f+g)=F(f),\ F(\alpha f)=\alpha F(f), \\ F(f*g)=F(f)\cdot F(g), \\ |F(f)| \leqq \|f\| \end{cases}
$$

ナル故，Riesz ノ定理カラ

$$
F(f)=\int_{\bar{\mathfrak{g}}} f(\bar{x})\,p(d\bar{x})
$$

ナル $\bar{\mathfrak{g}}$ 上ノ completely additive measure $p(d\bar{x})$ ガ，即チ $\mathfrak{g}$ 上デ $p$ ガ定マルガ，コレガ invariant measure ニ関シテ absolutely continuous トナッテ

$$
(46)\quad F(f)=\int_{\mathfrak{g}} f(x)\,h(x)\,dx
$$

トナリ，$h(x)$ ハ実ハアル character $\chi(x)$ カラ

$$
(47)\quad h(x)=\frac{1}{n}\chi(x),\quad n=\chi(1)
$$

ニヨッテ得ラレル。逆ニ (46)(47) ニテーツノ character $\chi$ カラ $F(f)$ ヲ定メレバ，(45) ヲ満足スル』

即チ $\mathfrak{g}$ ノ character ハ $\mathfrak{R}_{\bar{\mathfrak{g}}}$ デ定マルコトガワカル。証明ハ先ヅ一ツノ character $\chi(x)$ デ

$F(f)=\int_{\mathfrak{g}} f(x)\frac{\chi(x)}{n}dx$ トオイテ (45) ノ満足サレルコ

トヲタメス。先ヅ $|\chi(x)| \leqq n$ カラ $|F(f)| \leqq \|f\|$.

*multiplicative* ナルコトハ

$$F(\chi') = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \chi' = \bar{\chi} \\ 0 & \chi' \neq \bar{\chi} \end{cases}$$

トナリ

$$(48) \quad \chi' * \chi'' = \begin{cases} \frac{1}{n'}\chi', & \chi' = \chi'', \quad n' = \chi'(1), \\ 0, & \chi' \neq \chi'' \end{cases}$$

デアルカラ

$$(49) \quad F(\chi' * \chi'') = F(\chi') \cdot F(\chi'')$$

トナルコトガ分ル。

$$f_1^0 = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_i, \quad f_2^0 = \sum_{i=1}^{n} b_i \chi_i$$

ノトキモ

$$F(f_1^0 * f_2^0) = F(f_1^0) \cdot F(f_2^0)$$

ナルコトモ (49) カラ直チニワカル。一般ノ場合ニハ *Pontrjagen* p. 120, *Theorem* 29 カラ $f_1$, $f_2$ ヲ夫々 $f_1^0$, $f_2^0$ デ一様ニ近似シテ $|F(f)| \leqq \|f\|$ ヲ用ヒレバヨイ.

逆ニ (45) ヲ満足スル $F(f)$ ガアレバ

$$(50) \quad F(\chi) = a(\chi)$$

トオケバ (48) カラ $a(\chi')\,a(\chi'') = \frac{1}{n'}\delta_{\chi',\chi''}\,a(\chi')$

カラ，アル $\chi$ ニ對シテ $F(\chi) = \frac{1}{n}$ $(n = \chi(1))$ デ，他ノ $\chi' \neq \chi$ デハ $F(\chi') = 0$ トナラネバナラナイ。再ビ上ノ *Pontrjagen*, *Theo.* 29 カラ

$$F(f)=\frac{1}{n}\int_{\mathfrak{g}} f(x)\chi(x)\,dx$$

ナルコトガワカル。q. e. d.

サテ §1. ノ場合ト同様ニ

(51) $$z_\alpha=\frac{1}{n}\chi_\alpha$$

トオイテ

(52) $$z_\alpha z_\beta=\sum_\gamma c^{\gamma}_{\alpha\beta} z_\gamma$$

ト有限和ニ展開サレルカラ $u=\sum_\alpha \lambda_\alpha z_\alpha$ ($\lambda$ : scalar) ナル有限和ノ全体ハ一ツノ commutative ring $\overline{\mathfrak{R}}$ ヲ作ル。$\overline{\mathfrak{R}}$ ノ元ノ $u$ ノ norm ヲ $\|u\|=\max_\alpha|\lambda_\alpha|$ トスル。

定理6 $\overline{\mathfrak{g}}$ 及ビ $\mathfrak{R}_{\overline{\mathfrak{g}}}$ ハ $\overline{\mathfrak{R}}$ ニヨッテ決定サレル。

ソノ意味ハ

(i) $\overline{\mathfrak{R}}$ ノ continuous multiplicative functional $F(u)$:

(53) $$\begin{cases} F(u+v)=F(u)+F(v),\ F(\lambda u)=\lambda F(u), \\ F(u\cdot v)=F(u)\cdot F(v), \\ |F(u)|\leqq M\cdot\|u\| \end{cases}$$

ハ必ズアル $\overline{x}\in\overline{\mathfrak{g}}$ ニヨッテ

(54) $$F(u)=u(\overline{x})$$

トシテアラハサレル。此ノ意味デ $\overline{\mathfrak{g}}$ ガ $\overline{\mathfrak{R}}$ カラキマル。

(ii) $\mathfrak{R}_{\overline{\mathfrak{g}}}\ni f$ カラ

(55) $$F_f=\int_{\mathfrak{g}} f(x)\,z_\alpha(x)\,dx$$

トシテ $\overline{\mathfrak{R}}$ ノ base ノ値ヲキメテ，$\overline{\mathfrak{R}}$ ノ continuous functional ヲ作レバ

$$
(56)\begin{cases} F_f = F_g \rightarrow f = g \\ F_{f+g}(\mathfrak{z}_\alpha) = F_f(\mathfrak{z}_\alpha) + F_g(\mathfrak{z}_\alpha),\ F_{\lambda f}(\mathfrak{z}_\alpha) = \lambda F_f(\mathfrak{z}_\alpha) \\ F_{f*g}(\mathfrak{z}_\alpha) = F_f(\mathfrak{z}_\alpha)\cdot F_g(\mathfrak{z}_\alpha) \end{cases}
$$

デ，$\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}$ ノ代数的構造ガキマル。」

（証）（ii）ハ定理5ヨリ明カデアル。（i）ノ証．本誌談話927（淡中氏ノ双對定理ニツイテ）§4ノ如ク normed ring $\mathfrak{R}_3$ 及ビソノ subring $R_G$（p.206参照）ヲ考ヘ、$\mathfrak{R}_{04}$ ヲ $\mathfrak{R}_3$ ヲナデ，$f(x) = f(axa^{-1})$（$a \in \mathfrak{G}$）トナル全体トスル。$\mathfrak{R}_{04}$ ハ又一ツノ normed ring トナリ，$\mathfrak{R}_4$ ノ Maximal ideal I ニ対シテ $\mathfrak{G} \ni x_0$ ガトレテ，I ハ $f(x_0) = 0$ トナル $f(x) \in \mathfrak{R}_4$ ノ全体トナル。（談話927，定理5及ソノ注意）

サテ $f(x) \in \mathfrak{R}_4 \cap R_G$ ヲトレバ，先ヅ $R_G$ ニ入ルコトカラ

$$
f(x) = \sum_\alpha \lambda_i^{(\alpha)} v_{ii}^{(\alpha)}(x)
$$

ト展開サレ，次ニ $\mathfrak{R}_4$ ニ入ルコトカラ

$$
f(x) = \sum_\alpha \lambda_\alpha \chi_\alpha(x)
$$

ト一様且ツ絶対収斂級数ニ展開サレル。今 $\overline{\mathfrak{R}}$ ノ上ノ(53)ヲ満足スル F ガアレバ，$|F(u)| \leqq M\|u\|$ カラ

$$F(f) = \sum \lambda_\alpha F(\chi_\alpha(x))$$

デ $\mathfrak{R}_4 \cap R_G$ 全体ニFヲ拡張シ, 次ニ $\mathfrak{R}_4$ マデ (53) ヲ保ツタママ拡張スルコトが出來ル。

故ニFハ $\mathfrak{R}_4$ ノ maximal ideal ニ對應スルカラアル $x_0 \in \mathfrak{G}$ がキマリ

$$F(u) = u(x_0)$$

トナル。 q.e.d.

———(河田)———